Densité des polynômes orthogonaux

Définition Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que pour tout n, $\int |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.
On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ. Il s'agit d'un espace de Hilbert.

Théorème Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, ρ une fonction poids et $(P_n)_n$ la famille orthonormale obtenue par Gram-Schmidt sur $(x^n)_n$.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$. Alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

- Étape 1 : Une telle famille $(P_n)_n$ existe

Par définition de fonction poids, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto x^n \in L^1(I,\rho)$.
Alors,
$$\|f_n\|_2^2 = \int_I |x^n|^2 \rho(x)\,dx = \|f_{2n}\|_1 < +\infty \quad \text{donc } f_n \in L^2(I,\rho).$$
On peut donc appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $(f_n)_n$ pour obtenir $(P_n)_n$.

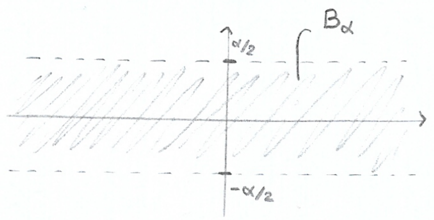
- Étape 2 : Condition nécessaire et suffisante

On sait que $(P_n)_n$ est une famille orthonormale de $L^2(I,\rho)$ qui est un Hilbert. Alors c'est une base hilbertienne si et seulement si $\overline{\mathrm{Vect}\,(f_n)_n} = \overline{\mathrm{Vect}\,(P_n)_n} = L^2(I,\rho)$ i.e. $\mathrm{Vect}\,(f_n)_n^{\perp} = \{0\}$.

- Étape 3 :

Soit $f \in L^2(I,\rho)$.
On considère $\varphi = f\rho\mathbb{1}_I$. On a alors sur I, $\varphi = \rho^{1/2} \times f\rho^{1/2} \in L^1(I)$ par Cauchy-Schwarz. car $\rho^{1/2}, f\rho^{1/2} \in L^2(I)$
Ainsi, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et on peut considérer sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x) e^{-i\omega x} \rho(x)\,dx$.

Soient $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\alpha}{2}\}$ et $g : (z,x) \longmapsto f(x) e^{-izx} \rho(x)$.



Pour $z \in B_\alpha$,
$$\int_I |g(z,x)|\,dx \leqslant \int_I e^{\alpha|x|/2} |f(x)| \rho(x)\,dx \leqslant \left(\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int_I |f(x)|^2 \rho(x)\,dx\right)^{1/2} < +\infty$$
Alors,
$$F : z \in B_\alpha \longmapsto \int_I g(z,x)\,dx \quad \text{est bien définie.}$$
De plus,
- $\forall z \in B_\alpha$, $g(z,\cdot)$ est mesurable sur I
- $\forall x \in I$, $g(\cdot,x)$ est holomorphe sur B_α
- $\forall z \in B_\alpha$, $\forall x \in I$, $|g(z,x)| \leqslant e^{\alpha|x|/2} f(x) \rho(x)$ fonction de $L^1(I)$

Ainsi, par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, F est holomorphe sur B_α.
On obtient de plus :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x)\,dx = (-i)^n \langle f, f_n \rangle_{\rho,I}$$

Si $f \in \mathrm{Vect}\,(f_n)_n^{\perp}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = 0$.
De plus, B_α est un ouvert connexe donc par le théorème de prolongement analytique, $F \equiv 0$ sur B_α
donc $\hat{\varphi} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. car $\mathbb{R} \subset B_\alpha$
Par injectivité de la transformation de Fourier, $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. $\varphi \in L^1(\mathbb{R}), \hat{\varphi} = 0 \in L^1(\mathbb{R})$
Donc :
$f = 0$